D 16 LE PAPYRUS DE RHIND

Le papyrus Rhind est le plus important document écrit qui nous permet, aujourd'hui, de connaître, un peu, les connaissances mathématiques de l'Antiquité égyptienne.

Il fut rédigé il y a plus de 3 650 ans par le scribe Ahmès. C'est un texte recopié à partir, d'après le copiste, d'écrits remontant à la XII$^{\text{ème}}$ dynastie, sous le règne d'Aménémhot III.

Son nom vient de l'Écossais Henry Rhind qui l'acheta à Louxor en 1858.

Il est actuellement conservé au British Museum à Londres. Des fragments sont aussi conservés au Brooklyn Museum à New York.

Il contient 84 problèmes résolus d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et d'arpentage et 3 notules dont une relative aux événements liés à la reconquête de l'Égypte par les Thébains de la XVII$^{\text{ème}}$ dynastie.

1. <u>Problèmes 1 à 23 (algorithmes de multiplication et de division)</u>

Ces problèmes permettent de comprendre la technique de la multiplication et de la division employée par les Égyptiens.

Ces techniques reposaient sur la duplication.

Par exemple, pour multiplier 227 par 19 ils multipliaient par 2 d'une ligne à l'autre :

1	227
2	454
4	908
8	1 816
16	3 632

Or, 19 = 16 + 2 + 1

En cochant en regard de 16, 2 et 1 dans la première colonne :

\ 1	227
\ 2	454
4	908
8	1 816
\ 16	3 632

Le résultat s'obtenait en additionnant les nombres de la deuxième colonne correspondants aux nombres de la première colonne qui font partie de la décomposition, d'où :

227 × 19 = 227 + 454 + 3 632 = 4 313.

Pour la division, la technique est le même, mais les colonnes sont inversées. Par exemple, pour diviser 65 par 5 :

\ 1	5
2	10
\ 4	20
\ 8	40

Le dividende est retrouvé en additionnant des nombres de la colonne de droite :
5 + 20 + 40 = 65

Le quotient est obtenu en additionnant les nombres correspondants dans la colonne de gauche :
1 + 4 + 8 = 13
D'où :
65 : 5 = 13

Dans le problème 3 on demande comment partager 6 pains entre 10 hommes.

Pour nous la réponse est évidente : est donnée à chaque homme $\frac{6}{10}$ de pain, soit 0,6 pain.

Mais les Égyptiens ne connaissaient que les fractions unitaires (fractions dont le numérateur est égal à 1).
$\frac{6}{10}$ devait être décomposé en fractions unitaires :
$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}=\frac{5}{10}+\frac{1}{10}=\frac{6}{10}$

Remarque sur les fractions égyptiennes :
Une fraction égyptienne est une somme de fractions qui ont toutes des numérateurs égaux à 1 et des dénominateurs entiers positifs et souvent différents les uns des autres (mais parfois la fraction $\frac{2}{3}$ intervient dans la décomposition, par exemple : $\frac{7}{10}=\frac{2}{3}+\frac{1}{30}$)

Le hiéroglyphe en forme de bouche , qui signifie *partie*, était utilisé pour représenter le numérateur 1.
Les fractions étaient écrites avec ce hiéroglyphe et le nombre correspondant au dénominateur en dessous :

 $=\frac{1}{3}$

Une fraction pouvait être représentée par une somme de fractions de numérateur 1, comme par exemple :
$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$ ou $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$

2. <u>Problèmes 23 à 34 (résolutions d'équations par la méthode de fausse position)</u>

Les problèmes 24 à 27 présentent tous le même type de problèmes dont l'énoncé est du type « une quantité à laquelle on ajoute une fraction d'elle-même devient un nombre donné, chercher cette quantité ».

Par exemple le problème 24 donne l'énoncé suivant :

« Un nombre ajouté à son septième donne 19, quel est ce nombre ? »

Aujourd'hui, nous dirions :

« Soit x ce nombre, alors :

$x + \dfrac{x}{7} = \dfrac{8x}{7} = 19$, soit $x = \dfrac{133}{8}$ »

Mais il y a 4 000 ans on ne faisait pas d'algèbre.

A défaut d'une démarche algébrique, les Égyptiens utilisaient la méthode dite de la fausse position (on appelle ainsi une méthode de résolution consistant à fournir une solution approchée, donc non exacte, conduisant, par la mise en œuvre d'un algorithme approprié tirant parti de l'écart constaté, à la solution exacte du problème posé.

Dans ce problème, l'idée première est de se « débarrasser » du dénominateur gênant en choisissant 7 comme solution approchée (fausse position). On obtient ainsi 8 dans le calcul du nombre augmenté de son septième.

Puis on divise 19 par 8, ce qui donne pour résultat $2 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8}$ et multiplie ce résultat par 7 (= 1 + 2 + 4), ce qui donne :

$$\left(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) + \left(4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \left(8 + 1 + \frac{1}{2} \right), \text{ soit } 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$$

Un autre exemple intéressant est celui du problème 26 dont l'énoncé est :

« Une quantité ‘ḥ‘ à laquelle on ajoute son $\dfrac{1}{4}$ devient 5, quelle est cette quantité ? »

Dans une première étape on donne une valeur aléatoire à la quantité, 4. On calcule donc $4 + \dfrac{1}{4} \times 4$:

1	4	✓
$\frac{1}{4}$	1	✓

Le résultat est 5, et non 15.

Dans une deuxième étape cherche le rapport entre 5 et 15 :

1	5	✓
2	10	✓
3	15	

Le rapport vaut 3, donc la relation entre la valeur aléatoire, 4, et la quantité ‘ḥ‘ vérifie l'égalité 4 × 3 = ‘ḥ‘

Dans une troisième étape le scribe calcule 4 × 3 :

1	3	
2	6	
4	12	✓

Le résultat est 12.

Dans une quatrième étape le scribe vérifie sa solution :

1	12	✓
$\frac{1}{4}$	3	✓

12 + 3 = 15, donc la quantité ‘ḥ‘ vaut bien 12 et son $\dfrac{1}{4}$ ajouté à elle-même font un total de 15.

Les problèmes 28 et 29 font chercher une quantité à laquelle on a soustrait puis ajouté une ou deux fractions d'elle-même.

3. Problèmes 41 à 60 (problèmes d'arpentage)

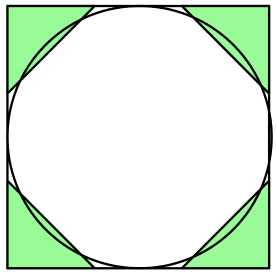
L'arpentage, mesures des distances et les problèmes géométriques qui lui sont liés sont étudiés : aires planes, volume de greniers à grains, inclinaison d'une pyramide (ligne de la plus grande pente des faces) aire d'un disque.

Les problèmes 48 et 50 porte sur le rapport qui lie l'aire d'un disque et son diamètre en cherchant à ramener l'aire du disque à celle d'un carré équivalent.

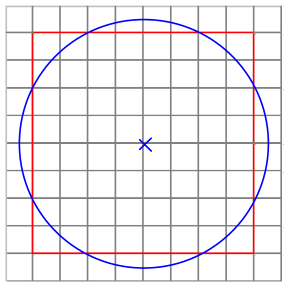
La première méthode utilisée est basée sur l'idée qu'un disque est inscrit dans

Problemas 41 a 60 (problemas de agrimensura) La agrimensura, medidas de las distancias y los problemas geométricos que le están vinculados se estudian: superficies planas, volumen de graneros a granos, inclinación de una pirámide (línea de la mayor cuesta de las caras) superficie de un disco. Los problemas 48 y 50 se refieren al informe que vincula la superficie de un disco y su diámetro pretendiendo traer la superficie del disco a la de un cuadrado equivalente. El primer método utilizado se basa en la idea que se inscribe un disco en

un carré ayant pour côté le diamètre du disque ; comme indiqué ci-contre, on partage les côtés du carré en trois parties égales puis on coupe les quatre « coins » ; si on utilise un carré de 9 cm de côté, l'approximation de π ainsi obtenue est égale à $\frac{63}{4{,}5^2}$, soit environ 3,11 ;



La deuxième méthode repose sur un calcul plus élaboré : le disque de diamètre 9 a une aire proche de celle du carré de 8. On diminue le diamètre d de son neuvième, on multiplie le résultat par d puis on retranche de ce produit son propre neuvième, soit $(d-\frac{1}{9}) d-\frac{1}{9}(d-\frac{1}{9}) d$.



L'égalité entre les 2 aires donne l'égalité suivante : $\frac{\pi\, 9^2}{4} \approx 8^2$

D'où $\pi \approx \left(\frac{8 \times 2}{9}\right)^2$

L'approximation ainsi obtenue est égale à $\frac{256}{81} = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$, soit environ 3,16.

4. Problèmes 61 à 87 (problèmes divers)

Le problème 64 traite du partage de mesures de grain entre différentes personnes. C'est un problème de suite arithmétique. Son énoncé est :

« Exemple de répartition de parts. Si on te dit 10 *hekat* de blé pour 10 hommes. Et la différence entre un homme et son voisin est $\frac{1}{8}$ de *hekat* de blé. La répartition moyenne est de 1 *hekat*. Soustrais 1 de 10, il reste 9. Prends la moitié de la différence qui est $\frac{1}{16}$. Les 9 fois qui valent $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{16}$ de *hekat* sont additionner à la répartion moyenne et tu dois soustraire $\frac{1}{8}$ de *hekat* par homme, chacun pris jusqu'au dernier. »

Remarque : l'hekat était l'unité de mesure de capacité, 30 hekats valait le cube de la coudée royale (environ 0,5 m).

La solution est donnée mais pas explicitée :

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{16}$

$1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$

$1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16}$

$1 \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$

$1 \quad \frac{1}{16}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{16}$

$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16}$

Le total est bien 10

Après avoir calculé le nombre moyen de *hekat* donné à chaque homme, 10 : 10 soit 1, le scribe calcule le nombre de différences entre les 10 hommes, 10 – 1 = 9. Chaque homme obtiendra $\frac{1}{8}$ de *hekat* de plus que le précédent, la différence entre le premier et le dixième sera donc de $\frac{45}{8}$, la part du dixième homme sera donc de $\frac{35}{8}$: 10, soit $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

Les problèmes 72 à 78, qui sont inscrits au verso du papyrus, sont des problèmes de proportions. Le thème du problème est l'échange de pains de taux de farine différents. Ces problèmes se résolvent avec une règle de trois.

Mais le problème 72, qui porte sur l'échange de 100 pains de taux 10 pour une quantité de pain de taux 45, est traité différemment. La méthode de résolution nécessite la connaissance des règles de la proportionnalité. Ces règles sont appliquées sans être explicitées.

Le problème 79 porte sur un domaine composé de 7 maisons dans lesquelles il y a 7 chats qui mange 7 souris qui avaient mangé 7 semences qui pouvaient rapporter 7 *hekats* de grain. La question est de savoir combien de *hekats* de blé ont été perdus.

maisons	7
chats	49
souris	343
semences	2 401
hekats	16 807

Pour nous c’est un problème de puissance et la réponse est 7^5, soit 16 807.